Concours blanc Maths A
Version longue

Le sujet est composé de trois problèmes totalement indépendants

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; PP^T = I_n \right\}.$$

Problème 1 - Une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7a-5c & 3b-3d \\ -5a+7c & -3b+3d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que f est linéaire.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On la notera $\mathscr{C}$.
2. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Déterminer le noyau de A. En déduire le noyau de f.
4. Préciser le rang de A puis une base de l'image de A. En déduire une base de l'image de f.

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, calculer $f(e_i)$. En déduire $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
7. Montrer que (e_4) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
8. Calculer P la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
9. Sans calcul, préciser le lien entre A, D, P et P^{-1}.
10. Vérifier que $P \in \mathscr{O}_4(\mathbb{R})$.
11. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E.
    (a) Montrer que $g \circ p = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
    (b) Montrer que $p \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(p)$.
12. Justifier que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
13. On note q la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $q \circ f = f \circ q$.
14. On pose $F = \mathrm{Im}(f)$. On note f_0 la restriction de f sur F autrement dit l'application définie par
$$\forall x \in F = \mathrm{Im}(f), \qquad f_0(x) = f(x).$$
    (a) Justifier que f_0 est un endomorphisme de F.
    (b) Préciser D_0 la matrice de f_0 dans la base $\mathscr{B}_0$.

Problème 2 - Isométries de $\mathbb{R}^2$

On considère

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. En déduire le rang de φ.
4. Préciser une base de l'image de φ.
5. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle alors que $\mathscr{C} = (1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose f_{a+ib} l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ canoniquement associé à la matrice $\varphi(a,b)$.

6. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha = a + ib$. Montrer que $f_{a+ib} = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.
7. A quelle condition sur α, f_α est-il un automorphisme ?
8. En déduire l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi(a,b)$ est inversible.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Soit $F = \{ f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{C}) \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$.

9. (a) Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que pour tout $(u,v) \in F^2$, $u \circ v \in F$.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_\alpha^k \in F$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
    (a) Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha$.
    (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule de $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement
    (c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
    (d) En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{Im}(\varphi)$ telles que $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$.
11. Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$f_\alpha^2 - (2-4i) f_\alpha - (3+6i) f_\alpha^0 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \varphi(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$.

12. Pour tout $\theta' \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ que l'on précisera tel que $R_\theta R_{\theta'} = R_u$.
13. En déduire que $R_\theta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et vérifier que $R_\theta \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$.
14. A quelle transformation du plan correspond $f_{e^{i\theta}}$?

Problème 3 - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$. On possède $n+1$ urnes U_0, U_1, …, U_n. On remplie l'urne U_0 de deux boules rouges et deux boules vertes et toutes les urnes U_1, …, U_n de deux boules rouges. On pioche deux boules dans l'urne U_0 que l'on range dans U_1. On pioche alors deux boules dans U_1 que l'on range dans U_2. Ainsi à l'étape $k \in \mathbb{N}^*$, on pioche deux boules dans l'urne U_{k-1} que l'on met dans l'urne U_k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules vertes obtenue dans l'urne U_n et si $n = 0$, $X_0 = 2$.

1. On pioche une boule dans U_0 et on note Y_1 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon. Sans remise, on pioche une seconde boule dans U_0, on note Y_2 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon.
   (a) Préciser la loi de Y_1.
   (b) Déterminer la loi de Y_2. *Le détail du calcul de* $\mathbb{P}(Y_2 = 1)$ *est attendu.*
   (c) Exprimer X_1 en fonction de Y_1 et Y_2.
   (d) Pourquoi ne pouvons-nous pas directement conclure que X_1 suit une loi binomiale ?
   (e) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$.
   (f) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = \frac{1}{6}$.
   (b) Ecrire l'évènement $(X_n = 2)$ en fonction de tous les $(X_k = 2)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 2)$ en fonction de n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 2)$.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{bmatrix}, \qquad A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = AW_n$.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, $\mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{6}I_3\right)$.
5. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $A = PDP^{-1}$.
6. Calculer P^{-1}.
7. Vérifier que $P \notin \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$.
8. Etablir une relation entre W_n, D^n, P et W_0.
9. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n.
10. Préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$. Ce résultat était-il prévisible ?